

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Методические указания к практическим занятиям
по курсу "Высшая математика"

СОСТАВИТЕЛИ: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

Москва 2019

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория вероятностей – раздел высшей математики, который изучает закономерности в массовых случайных событиях. Основные понятия теории вероятностей: испытание, событие, вероятность события.

Испытанием (опытом) называют каждое осуществление некоторой совокупности условий. **Событие** – результат испытания.

Пример 1.1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в мишень – событие.

Пример 1.2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны – это испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

События можно подразделить на **три вида**: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет в результате испытания.

Пример 1.3. При бросании игрального кубика выпадение хотя бы одного очка - достоверное событие.

Пример 1.4. Наступление ночи по прошествии дня – достоверное событие.

Невозможным называют событие, которое не может произойти в данном испытании.

Пример 1.5. Выпадение семи очков при подбрасывании одного игрального кубика – событие невозможное.

Пример 1.6. Выпадение цифры 5 при бросании десятикопеечной монеты – невозможное событие.

Случайным называют событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате испытания.

Пример 1.7. Выпадение одного очка при подбрасывании игрального кубика – событие случайное.

Пример 1.8. Выпадение герба при подбрасывании монеты – событие случайное.

Случайные события обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots

Пример 1.9. A – появление герба при испытании, заключающемся в подбрасывании монеты; B – попадание в мишень при выстреле; C – на сборку поступила нестандартная деталь.

Случайные события называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1.10. Брошена монета. Появление герба исключает появление цифры. События «появился герб» и «появилась цифра» - несовместные.

Пример 1.11. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - несовместные.

Случайные события называют **совместными**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

Пример 1.12. Брошен игральный кубик. События «выпадение четного числа очков» и «выпадение шести очков» являются совместными.

Пример 1.13. В аудиторию вошел человек. События - «в аудиторию вошел человек старше 30 лет» и «в аудиторию вошел мужчина» - совместные, поскольку в аудиторию может войти мужчина старше 30 лет.

Случайные события называют *единственно возможными*, если в результате испытания появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 1.14. Стрелок стреляет по мишени. Обязательно произойдет одно из двух событий: попадание или промах. Эти события единственно возможные.

Случайные события называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример 1.15. Появление герба и цифры при бросании монеты есть события несовместные, единственно возможные и равновозможные. Предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Полной группой называют совокупность единственно возможных и несовместных событий данного испытания. Это означает, что в результате испытания может произойти только одно из этих событий.

Пример 1.16. Бросается игральный кубик. События, заключающиеся в том, что на верхней грани кубика появится 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков, образуют полную группу.

Пример 1.17. События «выпадение герба» и «выпадение цифры» при подбрасывании одной монеты образуют полную группу.

Вероятность события – мера объективной возможности появления события в данном испытании. Существуют несколько определений вероятности события (классическое, статистическое, геометрическое и др.).

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Классическое определение вероятности основано на так называемой класси-

ческой схеме испытания. **Классическая схема испытания** – это идеализированная схема испытания, когда испытание проводится теоретически (мысленно) и можно выделить полную группу несовместных, единственно возможных и равновероятных событий $A_1, A_2 \dots A_n$. Эти события называют **элементарными событиями** или **элементарными исходами** испытания.

Вероятность события A равна отношению числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности события:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример 2.1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 зеленых. Извлекается один шар. Найти вероятности следующих событий: а) появился красный шар (событие A); б) появился черный шар (событие B); в) появился цветной шар (событие C).

Решение. Испытание – извлечение шаров. Элементарный исход испытания – появление шара. Число всех таких исходов равно числу шаров в урне $n=30$. Эти исходы несовместны, единственно возможны (обязательно появится один шар) и равновероятны (считается, что шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

а) Событие A состоит в том, что из урны извлечен красный шар. Число исходов, благоприятствующих этому событию, равно числу красных шаров в урне $m=10$. Тогда вероятность появления красного шара:

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

б) Событие B состоит в том, что из урны извлечен черный шар. Число исходов, благоприятствующих этому событию, равно числу черных шаров в урне $m=0$. Тогда вероятность появления черного шара:

$$P(B) = \frac{0}{30} = 0$$

Событие B – невозможное.

с) Событие C состоит в том, что из урны извлечен цветной шар. Число исходов, благоприятствующих этому событию, равно числу всех шаров в урне $m=30$. Тогда вероятность появления шара:

$$P(A) = \frac{30}{30} = 1.$$

Событие C – достоверное.

Пример 2.2. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы единственно возможны (одна из цифр набрана обязательно) и равновозможны (цифра набрана наудачу). Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра только одна). Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{1}{10} = 0,1.$$

3. ЗАДАЧИ

1. В урне содержится 5 белых, 10 красных и 6 черных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность появления: а) белого шара; б) красного шара; в) цветного шара; г) синего шара?

2. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.
3. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет: а) шесть очков; б) выпало четное число очков; в) выпало или одно или два очка; с) выпадет хотя бы одно очко.
4. В ящике содержится 10 шаров с номерами от 1 до 10. Извлекли один шар. Найти вероятность того, что: а) номер шара меньше пяти; б) больше восьми; в) номер шара не больше 10.
5. Для сдачи крови в поликлинику пришли 12 доноров, из которых 5 доноров имеют первую группу крови, 3 – вторую группу крови, остальные – третью. Какова вероятность того, что первый сдавший кровь донор имеет третью группу крови?
6. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают один белый шар и откладывают в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже белый.
7. Какова вероятность того, что наудачу извлеченная кость из полной игры домино имеет: а) сумму очков, равную нулю, одному, двум, трем; б) сумму очков более 12?
8. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 у.е., на четыре билета – 50 у.е., на десять билетов – 20 у.е., на двадцать билетов – 10 у.е., на 165 – 5 у.е., на 400 – 1 у.е., остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть не менее 10 у.е.?
9. Структура служащих банка состоит из администраторов и операционистов. Среди администраторов – 25 женщин и 15 мужчин, среди операционистов – 35 женщин и 25 мужчин. Случайно отобран один человек. Найти вероятность, что выбран: а) мужчина-администратор; б) женщина-операционист; в) мужчина; г) операционист.

10. Магазин в целях рекламы нового товара проводит лотерею, в которой один главный приз (телевизор), пять призов – видеомаягнитофон, 100 призов – ча-сы, 1000 призов – видеокассеты. Лотерейные билеты получили 10 000 по-купателей. Чему равна вероятность того, что покупатель, который приобрел рекламируемый товар: а) выиграет главный приз; б) выиграет видеомаягни-тофон; в) выиграет какой-либо приз; г) ничего не выиграет.
11. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.
12. Какова вероятность, что число на вырванном наудачу листе нового кален-даря: а) соответствует 29 числу месяца; б) менее восьми; в) кратно пяти (ес-ли в году 365 дней)?
13. При игре в лото наудачу извлекается одна фишка. На фишках написаны числа от 1 до 90. Какова вероятность того, что на вынутой фишке написано: а) число, кратное 10; б) натуральное число; в) простое число*?
14. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем перемешиваются. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) три; б) две; в) одну. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный кубик не будет иметь окрашенных граней?
15. Монета подброшена два раза подряд. Найти вероятность, что: а) один раз выпадет герб; б) оба раза выпадет герб; в) хотя бы один раз выпадет герб.
16. В одном ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, во втором – шары с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика извлекли по одному шару. Какова

* Простое число – натуральное число, большее, чем единица, и не имеющее других делите-лей, кроме себя и единицы: 2, 3, 5, 7, 13...

вероятность, что сумма номеров вынутых шаров равна: а) 10; б) 11; в) меньше 10; г) больше 15?

17. При перевозке ящика, в котором содержались 21 окрашенная и 10 неокрашенных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекли одну деталь, которая оказалась окрашенной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) окрашенная деталь; б) неокрашенная деталь.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие существуют виды событий?
2. Какие события называются несовместными, совместными, равновозможными, единственно возможными?
3. Что называется полной группой событий ?
4. Охарактеризуйте классическую схему испытания.
5. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
6. Сформулируйте свойства вероятности события.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2001. 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001. 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1991. 157 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. -М.: Наука, 1988. 480 с.

5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001, 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Основные понятия	3
2. Классическое определение вероятности события	6
3. Задачи	8
4. Контрольные вопросы.....	10
Литература.....	11

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Объем _____ п.л. Тираж 75 экз.

Издательский центр МАТИ